

Zabawka „dzięcioł”

Drużyna XIV LO im. Stanisława Staszica

Zabawka „dzięcioł” – jak na rys. 1 – wykonuje ruch oscylacyjny. Zbadaj i wyjaśnij ten ruch.

Wstęp

Zabawka „dzięcioł” składa się z pręta oraz zsuwającego się po nim pierścienia, do którego za pomocą sprężynki przyczepiony jest dzięcioł. Dzięcioł ten składa się ze sztywno połączonych tułowia, głowy oraz dzioba. Wewnętrzny promień pierścienia jest niewiele większy niż promień pręta. W stanie spoczynku, pierścień przechylony jest tak, że trze on o pręt uniemożliwiając zsuwanie się. Gdy jednak dzięcioł zostaje wprowadzony w ruch oscylacyjny, w jego trakcie pierścień może oderwać się od pręta, dzięki czemu siła grawitacji przewyższa tarcie, a cały układ może się zsuwać.

W poniższej pracy przedstawiony zostanie prosty model teoretyczny opisujący ruch zabawki, bazujący między innymi na prawie Hooke’a oraz ograniczeniu ruchu dzięcioła do trzech stopni swobody. Przetworzone rozważania teoretyczne zweryfikowane zostały doświadczalnie, czego wyniki również zostały przedstawione.

Opis jakościowy

Ruch układu odbywa się w następujący sposób:

1. Pierścień jest nieruchomy. Tarcie statyczne powstrzymuje jego ruch. Dzięcioł zostaje odchyłony ogonem do



Rysunek 1

- pręta. Z tego położenia rozpoczyna ruch dziobem do pręta.
2. Pierścień nie obraca się, lecz zsuwa. Działa na niego tarcie kinetyczne względem pręta.
3. Pierścień nie styka się z prętem. Zsuwa się po nim swobodnie.

Następnie ma miejsce uderzenie dzioba o pręt. Dzięcioł odbija się od niego i rozpoczyna ruch w przeciwną stronę.

4. Pierścień zsuwa się swobodnie. Dzieciół porusza się dziobem od pręta.
5. Pierścień dotyka pręta. Tarcie kinetyczne hamuje jego ruch.
6. Pierścień zostaje zatrzymany. Dzieciół zbliża się do swojego maksymalnego wychylenia. Osiąga je i ruch rozpoczyna się od początku.

W trakcie zsuwania energia potencjalna grawitacji (pierścienia i dzieciola) zmienia się w energię kinetyczną tegoż układu, która podczas zatrzymywania się pierścienia zmienia się w ciepło oraz energię potencjalną sprężyny. Dzięki temu, mimo tłumienia, drgania układu są podtrzymywane.

Uproszczenia modelu

Analiza filmów z szybkiej kamery [1] ukazuje, że nie wszystkie etapy ruchu wymienione w powyższym punkcie odgrywają równie znaczącą rolę. Fazy 2. i 3. trwają bardzo krótko w porównaniu z pozostałymi (o ponad rząd wielkości krócej), dlatego zostaną pominięte w analizie ruchu. Dzieje się tak, gdyż w etapie 1. Dzieciół rozwija prędkość na tyle dużą, że uderzenie dzioba następuje niemal natychmiast po rozpoczęciu zsuwania.

Zsuwanie pierścienia następuje głównie w etapie 4. Okazuje się za to, że bezwładność układu jest na tyle mała, że zostaje on zatrzymany niemal natychmiast po zetknięciu się pierścienia z prętem (tarcie kinetyczne). Z tej przyczyny, pominięta zostanie także faza 5., zaś zetknięcie pierścienia z prętem potraktowane jako zderzenie idealnie niesprężyste.

Pominięty zostanie także ruch poziomy pierścienia – uwzględnimy wyłącznie jego ruch w pionie oraz obrotowy (w płaszczyźnie drgań dzieciola).

Z filmów nagranych szybką kamerą wywnioskować można, że w fazie 4. sprężynka

pozostaje nienapięta, a pierścień porusza się w taki sposób, że w układzie dzieciola nie obraca się, co oznacza, że ich układ można traktować jako bryłę sztywną. Jest to związane z małym momentem bezwładności pierścienia względem jego środka masy.

Powyższe założenia znajdują potwierdzenie także w symulacjach numerycznych ruchu dzieciola, przedstawionych w [2] i [3].

Ruch drgający

Analizę ruchu rozpoczniemy od chwili uderzenia dzioba w pręt. W jego wyniku część energii kinetycznej zostaje wytracona. Jeśli przed tą chwilą prędkość kątowa układu względem jego środka masy wynosiła ω_0 , to po zderzeniu wynosić ona będzie:

$$\omega_1 = -\epsilon\omega_0 \quad (1)$$

Gdzie ϵ jest współczynnikiem dyssypacji i przyjmujemy, że jest on stały i mniejszy niż 1. Jeśli pominiemy tarcie w trakcie zsuwania się pierścienia (spadek swobodny w fazie 4.), to prędkość ta będzie stała aż do chwili zetknięcia się pierścienia z prętem (wynika to z założenia o bryle sztywnej). Jeśli zderzenie dzioba nastąpi, gdy pierścień nachylony jest do poziomu pod kątem ϕ_0 , zaś zetknięcie pierścienia z prętem dla kąta ϕ_1 , to czas pomiędzy tymi zdarzeniami wynosić będzie:

$$t = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\omega_1} \quad (2)$$

W tym czasie w wyniku spadku w polu grawitacyjnym, środek masy układu uzyska pionową prędkość:

$$v = -gt \quad (3)$$

W trakcie spadku swobodnego układ obracał się wokół swojego środka masy. Po chwili

zderzenia z prętem, pierścień przestaje obracać się w ogóle, zaś dzięcioł obraca się wokół pewnej osi obrotu wyznaczonej przez budowę sprężynki. A zatem względem tej osi w chwili zetknięcia się pierścienia z prętem, dzięcioł uzyska prędkość kątową.:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R}{r} + \frac{v \cos \phi_1}{r} \approx \frac{\omega_1 R}{r} + \frac{v}{r} \quad (4)$$

Gdzie R to odległość środka masy dzięcioła od środka masy układu, zaś r to odległość środka masy dzięcioła od osi obrotu. W przybliżeniu przyjęto, że $|\phi_1| \ll 1$ (na podstawie filmu [1]). Przyjmijmy, że na dzięcioła działa moment siły proporcjonalny do kąta wychylenia dzięcioła z położenia równowagi. Oznacza to, że w tym czasie porusza się on ruchem harmonicznym. Będzie on opisany równaniem:

$$\theta = -A \sin(\omega t - \beta) \quad (5)$$

Gdzie ω to częstość tych drgań, A to ich amplituda, zaś β to początkowa faza ruchu. $\beta \neq 0$, ze względu na obecność grawitacji.

$$A = -\frac{\omega_2}{\omega \cos \beta} \quad (6)$$

$$\tan \beta = -\frac{\theta_0 \omega}{\omega_2} \quad (7)$$

Gdzie θ_0 to kąt początkowego wychylenia z położenia równowagi.

Jeśli założymy, że ten ruch odbywa się bez dyssypacji energii, prędkość kątowa dzięcioła będzie równa co do modułu na początku i na końcu tego ruchu (w chwili oderwania pierścienia od pręta). Po ustaleniu się powtarzalności drgań całego układu, jego prędkość kątowa względem jego środka masy w tym momencie będzie równa ω_0 .



Rysunek 2

$$\omega_0 = -\omega_2 \frac{r}{R} \quad (8)$$

Korzystając z poprzednich wyników możemy wyznaczyć t .

$$t = \sqrt{(\phi_0 - \phi_1) \frac{R}{g} \frac{1 - \epsilon}{\epsilon}} \quad (9)$$

Można wyznaczyć także t' - czas przez jaki pierścień jest zablokowany.

$$t' = \frac{\pi + 2\beta}{\omega} \quad (10)$$

Jeśli uwzględnimy fakt, że moment siły grawitacji dzięcioła względem osi obrotu jest niewielki względem momentu siły sprężystości dla małych wychyleń (co wynika z obserwacji), można przyjąć, że $\beta \approx 0$.

Średnia prędkość pionowa pierścienia to:

$$v_{sr} = \frac{gt^2}{2(t + t')} \quad (11)$$

Układ doświadczalny

W celu zweryfikowania powyższego modelu teoretycznego zbudowaliśmy dwa układy doświadczalne. Jeden z nich składał się z zabawki „dzięcioł” ustawionej na poziomej

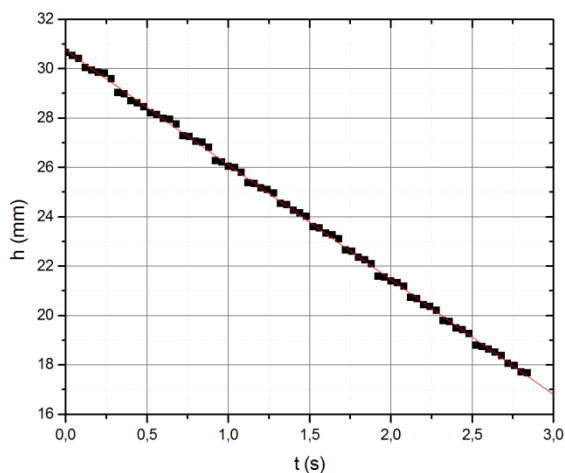
podstawie, której ruch był filmowany przez kamerę z obiektywem o ogniskowej 55 mm z odległości kilku metrów (rys 3.). W celu stłumienia drgań pręta, był on przytrzymywany od góry w stałym położeniu.

Drugi z nich składał się z samego dziecięcia z pierścieniem. Pierścień przymocowany był do podłoża, zaś dziecięta, mogący swobodnie poruszać się w obszarze swoich drgań, został wprowadzony w ruch oscylacyjny, który został sfilmowany (rys. 2.).

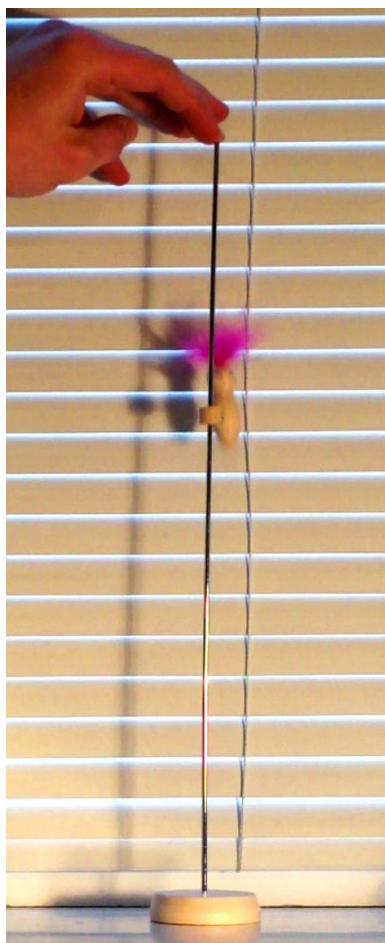
Wyniki doświadczeń

Podczas doświadczeń pod uwagę brane były tylko te, które spełniały postawione przez nas warunki (tj. przedstawione

uproszczenia – brak ruchu obrotowego wokół pręta). Założyliśmy ponadto, że zarówno zabaka używana w doświadczeniach, jak i ta z filmu [1] nie różnią się znacznie, czyli dokonane przez nas uproszczenia odnoszą się również do naszego układu. Niedoskonałość układu została uwzględniona w rachunku błędu pomiarowego.



Wykres 1



Rysunek 3

Analiza filmu z drugiego doświadczenia pozwoliła na ustalenie częstości drgań dziecięcia ω . Polegała ona na zliczeniu drgań wykonanych przez dziecięta przez okres 5 sekund. W tym czasie tłumienie drgań nie wpływało na amplitudę w stopniu, który uniemożliwiłby rozpoznanie poszczególnych drgań. Duża liczba drgań pozwoliła na zminimalizowanie błędu pomiaru związanego z pominięciem któregoś z nich. Otrzymałym wynikiem jest:

$$\frac{\omega}{2\pi} = (12,2 \pm 0,5) \text{ Hz}$$

$$\omega = (76,7 \pm 3,2) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Błędy pomiaru wynikają z dokładności zliczania. Na podstawie tych wyników można wyznaczyć czas t' .

$$t' = (40 \pm 2) \text{ ms}$$

W pierwszym doświadczeniu za pomocą programu Tracker wyznaczyliśmy wysokość pierścienia w funkcji czasu. Duża odległość aparatu od układu pozwoliła zminimalizować błąd paralaksy. Do wyników tych pomiarów dopasowaliśmy prostą, która pozwoliła wyznaczyć średnią prędkość pierścienia. Wyniosła ona:

$$v_{sr} = (4,64 \pm 0,02) \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Wyniki pomiarów oraz dopasowaną do nich prostą przedstawia wykres 1.

Ekstrahując ścieżkę dźwiękową z filmu oraz dokonując jej analizy za pomocą programu Audacity, zliczona została liczba uderzeń

dzioba o pręt. Umożliwiło to wyznaczenie wartości $t + t'$ wyniosła ona:

$$t + t' = (202 \pm 2) \text{ ms}$$

Co, przy uwzględnieniu poprzednich wyników daje:

$$t = (162 \pm 4) \text{ ms}$$

Porównanie teorii i doświadczenia

Korzystając z uzyskanych wartości t i t' można na podstawie modelu teoretycznego wyznaczyć przewidywaną przez model prędkość średnią pierścienia. Wynosi ona:

$$v_{mod} = \frac{9.81 \times 0,162^2 \text{ m}}{2 \times 0,202} \frac{1}{s} = (637 \pm 20) \frac{\text{mm}}{s}$$

Jest to wartość dużo większa od zmierzonej prędkości. Oznacza to, że w założeniach i uproszczeniach modelu pomijane są kluczowe dla zjawiska czynniki.

Podsumowanie dotychczasowej pracy

W niniejszym opracowaniu podjęliśmy próbę opisu teoretycznego zabawki znanej jako „woodpecker”. W naszych rozważaniach korzystaliśmy między innymi z istotnego dla nas filmu z szybkiej kamery [1]. Z braku niezbędnego sprzętu doświadczalnego, nie mogliśmy nagrać używanej w doświadczeniach zabawki. W ciągu dalszej pracy chcielibyśmy nagrać za pomocą szybkiej kamery nasz egzemplarz „dzięcioła”. Dzięki temu doświadczeniu możliwym będzie zweryfikowanie założeń używanych w naszym modelu teoretycznym (w szczególności teorii o swobodnym upadku), a także udoskonalenie naszego modelu teoretycznego.

Przeprowadzone przez nas doświadczenia ukazują, że ruch dzięcioła jest dużo bardziej

złożony, niż może się wydawać i model, który mógłby opisać go w zadowalającym stopniu, musi uwzględniać tę złożoność.

Odnośniki

[1] <http://www.youtube.com/watch?v=s3YSnNAIHDg>

– Woodpecker Toy Physics

[2] <http://www.youtube.com/watch?v=1bsqJmugH1Y>

– The woodpecker toy dynamics – 3dof model

[3] Christoph Glocker, Christian Studer – *The Woodpecker Toy* 2003