

Pineski

Drużyna XIV LO im. Stanisława Staszica

Pineska pływająca na powierzchni wody w pobliżu innych pływających przedmiotów podlega działaniu sił przyciągających. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko. Czy na zasadzie podobnego mechanizmu możliwe jest uzyskanie siły odpychającej?

Wstęp

Unoszący się na cieczy obiekt zazwyczaj odkształca jej powierzchnię (rys. 1). Dzięki temu zjawisku, wynikającemu z istnienia napięcia powierzchniowego dwa unoszące się w cieczy ciała mogą oddziaływać na siebie. Oddziaływanie to wynika z faktu, że odkształcenie to wiąże się z istnieniem pewnej dodatkowej energii. W jej skład wchodzi energia potencjalna grawitacji samych obiektów, a także cieczy, która uległa przemieszczeniu pod wpływem ich obecności oraz zmiana energii powierzchni cieczy związana z jej odkształceniem. Energia ta w ogólności zależy od położenia tych dwóch obiektów oraz ich orientacji, a nawet ruchu. Jej ścisłe obliczenie pozwoliłoby na wyznaczenie wprost siły oddziaływania dwóch ciał na powierzchni cieczy, jest to jednakże niemożliwe z uwagi na trudności matematyczne.



Rysunek 1

W poniższym opracowaniu wprowadzony zostaje model teoretyczny opisujący oddziaływanie dwóch obiektów, których jeden z wymiarów jest porównywalny z długością kapilarną (charakterystyczną dla odkształceń powierzchni danej cieczy), zaś drugi jest od niej dużo większy. Model ten uwzględnia efekty pominięte przy analizie obiektów dużo mniejszych od tej odległości przeprowadzonej w [1].

Za pomocą otrzymanego modelu uzyskiwane są jakościowe wnioski dotyczące wpływu tych efektów na zachowanie przyciągających się obiektów.

Przeprowadziliśmy także doświadczenie badające ruch pinesek na powierzchni cieczy i porównaliśmy jego wyniki z przewidywaniami obydwu modeli.

Przybliżenie dla małych nachyleń powierzchni

Jeśli kąt nachylenia powierzchni cieczy do poziomu w każdym punkcie jest dużo mniejszy od jedności można skorzystać z pewnych istotnych uproszczeń w równaniach opisujących jej odkształcenie. Oznaczmy przez h wysokość cieczy w danym punkcie nad jej wysokością przy nieobecności jakichkolwiek ciał. Wprowadźmy ponadto wielkość o wymiarze odległości $\lambda = \sqrt{\gamma/\rho g}$, gdzie γ to napięcie powierzchniowe danej cieczy, ρ to jej gęstość, zaś g – przyspieszenie grawitacyjne.

Jeśli ciecz jest jednorodna, jej powierzchnię w stanie równowagi opisuje w przybliżeniu równanie:

$$\nabla^2 z = \frac{z}{\lambda^2} \quad (1)$$

Gdzie ∇^2 to operator Laplace'a (w dwóch wymiarach). Równanie to wynika bezpośrednio z warunku równowagi sił działających na cienki słup wody zawierający jej powierzchnię (odnośnik [2]). Zauważmy ponadto, że dla małych kątów odkształcenie cieczy nie wprowadza żadnej zmiany do energii powierzchni (każdy jej niewielki element ma powierzchnię w pierwszym przybliżeniu taką samą, jak jej rzut na płaszczyznę poziomą).

Ruch kwazistacjonarny

Rozpatrywanie ogólnego przypadku ruchu ciał na powierzchni wody nie pozwala na zastosowanie równania (1), gdyż opisuje ono przypadek równowagi dynamicznej – nie uwzględnia rozchodzenia się fal i innego ruchu cieczy. Ponieważ uwzględnienie tych zjawisk prowadzi do znacznej komplikacji zagadnienia, można założyć, że ruch ciał jest na tyle powolny, że w dowolnej chwili ciecz przyjmuje położenie równowagi.

Inny problem stanowi bezwładność ciał. Wysokość oraz orientacja ciała zależnie nie tylko od jego położenia (w poziomie), lecz także sposobu, w jaki tam dotarł. Znacznym uproszczeniem jest założenie pewnej równowagi dynamicznej. Uzasadnione jest przyjęcie równowagi sił w kierunku pionowym (dla małych nachyleń cieczy prędkość w tym kierunku jest na dużo mniejsza niż w pozostałych) oraz równowagi momentów sił (prędkość zmian nachylenia również jest nieznaczna).

Przybliżenie dla małych obiektów

Dla obiektów, których rozmiar jest dużo mniejszy niż λ można poczynić dodatkowe

uproszczenia. Przede wszystkim w takim przypadku nachylenie cieczy zmienia się pomijalnie na odległościach porównywalnych z rozmiarami ciała. Oznacza to, że można wykorzystać liniowość równania (1) i wynikającą z niego zasadę superpozycji, gdyż warunek utrzymania założonej równowagi jednego ciała nie wiąże się z odkształceniem wynikającym z obecności innego obiektu.

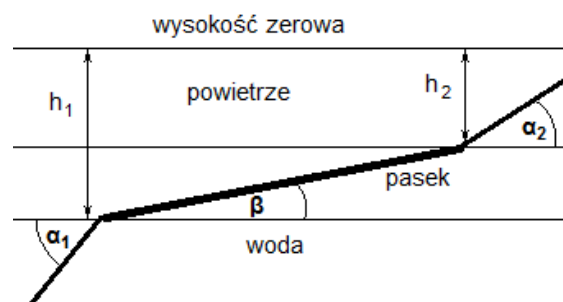
Założenie to prowadzi do przybliżonego równania na siłę oddziaływania dwóch spełniających ten warunek ciał o symetrii osiowej odległych od siebie o R (wyprowadzone w [1]):

$$F = C K_1 \left(\frac{R}{\lambda} \right) \quad (2)$$

Gdzie C to współczynnik zależny od geometrii ciał i właściwości cieczy, zaś K_1 to zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju, pierwszego rzędu.

Oddziaływanie pinesek

W przypadku czystej wody w warunkach normalnych λ wynosi około 2 mm. Oznacza to, że nie można skorzystać z powyższego przybliżenia dla pinesek, których średnica wynosi około 9 mm. W celu określenia wpływu, jaki na oddziaływanie ma rozmiar pinesek rozważmy dwa paski o długości w i szerokości $2r$ ($w \gg 2r$) położone równolegle na powierzchni cieczy. Położenie jednego z pasków ukazuje Rysunek 2.



Rysunek 2

Siła wyporu działa na pasek względem jego środka momentem:

$$\tau_B = \rho g w r^2 \frac{h_2 - h_1}{3} \quad (3)$$

Siły napięcia powierzchniowego zaś:

$$\tau_T = \gamma w r (\sin \alpha_1 \cos \beta - \cos \alpha_1 \sin \beta + \sin \alpha_2 \cos \beta - \cos \alpha_2 \sin \beta) \quad (4)$$

Co dla małych kątów można przybliżyć przez:

$$\tau_T \approx \gamma w r (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta) \quad (5)$$

Pomijając moment siły ciężkości, warunek równowagi momentów sił można zapisać, jako:

$$0 = \rho g r \frac{h_2 - h_1}{3} + \gamma (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta) \quad (6)$$

Z drugiej strony warunek równowagi sił w pionie dla małych kątów przedstawia równanie:

$$0 = \gamma w (\alpha_1 - \alpha_2) + m g - \rho g w r (h_1 + h_2) \quad (7)$$

Z zależności geometrycznych ponadto:

$$\beta = \frac{h_1 - h_2}{2r} \quad (8)$$

W celu wyznaczenia wysokości paska oraz kąta jego obrotu należy jeszcze opisać powierzchnię wody dookoła niego. W tym przypadku równanie (1) redukuje się do postaci jednowymiarowej:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{z}{\lambda^2} \quad (9)$$

Czego ogólnym rozwiązaniem jest:

$$z = C_1 e^{\frac{x}{\lambda}} + C_2 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (10)$$

Gdzie C_1 i C_2 to odpowiednie stałe. Jeśli po prawej stronie rozpatrywanego paska nie ma żadnego obiektu, równanie to musi spełniać warunki brzegowe: $\lim_{x \rightarrow \infty} z_2(x) = 0$ oraz $z_2(0) = -h_2$, co prowadzi do postaci:

$$z_2(x) = -h_2 e^{-x/\lambda} \quad (11)$$

Obliczenie pochodnej tej funkcji w $x = 0$ pozwala wyznaczyć kąt α_2 . Gdy jest on mały, wynosi w przybliżeniu:

$$\alpha_2 = \frac{h_2}{\lambda} \quad (12)$$

Wyznaczenie kąta α_1 wymaga opisanie powierzchni pomiędzy paskami. Jeśli odległość między ich bliższymi krawędziami wynosi l , to równanie powierzchni musi spełniać warunki $z_1(-l/2) = z_1(\frac{l}{2}) = -h_1$. Narzuca to postać:

$$z_1 = -C \cosh \frac{x}{\lambda} = -h_1 \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(l/2\lambda)} \quad (13)$$

Kąt α_1 można wyznaczyć obliczając pochodną w punkcie $x = l/2$.

$$\alpha_1 = -\frac{h_1}{\lambda} \tanh(l/2\lambda) \quad (14)$$

Przyciąganie się pasków jest spowodowane zmianą kierunku działania siły wyporu (w przybliżeniu dla małych kątów siły napięcia powierzchniowego sumują się do zera) – jest ona prostopadła do paska, co oznacza, że posiada ona składową poziomą, równą:

$$F = \rho g w \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \quad (15)$$

Korzystając z poprzednich wzorów można wyznaczyć siłę działającą na pasek. Nie pozwoli to jednak uzyskać żadnych przydatnych wyników. Użyteczne za to będzie spostrzeżenie, że:

$$F = \rho g w r (h_1 + h_2) \sin \beta \quad (16)$$

Co korzystając z poprzednich wyników można przedstawić jako:

$$F = (\gamma w (\alpha_1 - \alpha_2) + mg) \sin \beta \quad (17)$$

Dla porównania opiszmy siłę oddziaływania dwóch bardzo wąskich pasków w sposób analogiczny, jak w [1]. Ponieważ możemy skorzystać z zasady superpozycji, wystarczy znać profil wody, dla pojedynczego paska w stanie równowagi. Ponadto siłę wyporu można zaniedbać z uwagi na to, że pasek jest nieskończenie cienki. Oznacza to, że energia potencjalna drugiego paska wynosi:

$$E = mgz(x) \quad (18)$$

Zatem działa na niego siła o wartości:

$$F = mgz'(x) \quad (19)$$

Wynik ten można porównać z rozwiązaniem dla szerokiego paska w celu uzyskania pewnych wyników jakościowych. Przede wszystkim zauważmy, że z uwagi na fakt, iż powierzchnia cieczy ma większe nachylenie bliżej obiektu przyciągającego, $\alpha_1 > \alpha_2$. Oznacza to, że $(\gamma w (\alpha_1 - \alpha_2) + mg)$ jest większe niż mg . Z obserwacji ponadto można wywnioskować, że $\sin \beta$ jest w przybliżeniu równy z' , co oznacza, że oddziaływanie szerokich pasków jest silniejsze niż pasków wąskich. Wniosek ten pozwala sądzić, że podobnie dzieje się w przypadku obiektów o innych kształtach i obliczenia przy założeniu niewielkich rozmiarów ciał przewidują siłę mniejszą niż w rzeczywistości.

Doświadczenie

Wykonane przez nas doświadczenie polegało na nagraniu ruchu unoszących się na wodzie pinesek (rys. 3). Pomiarów dokonano dla

czystej wody i wody z detergentem. Przy pomocy programu do analizy filmów określaliśmy położenie pinesek w kolejnych klatkach, na podstawie czego wyznaczyliśmy odległość między nimi w funkcji czasu. Przy każdym z filmów pinecki początkowo spoczywały.

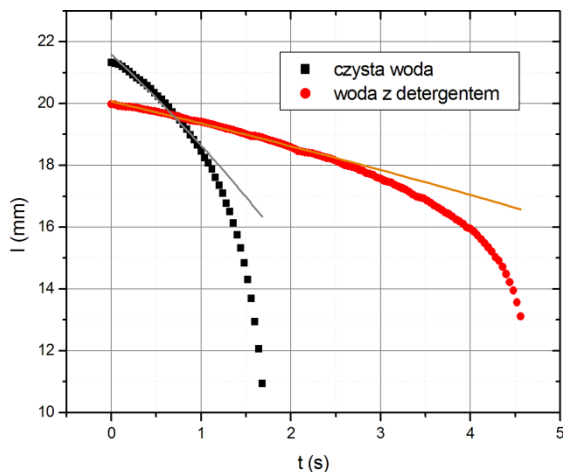


Rysunek 3

Zakładając obecność sił oporu lepkiego, proporcjonalnych do prędkości obiektu oraz zaniedbując bezwładność ciał, przewidywania równań tego ruchu dla małych obiektów (odnośnik [1]) prowadzą do równania:

$$l = \sqrt{l_0^2 - ct^2} \quad (20)$$

Gdzie c jest pewną stałą, zaś l_0 odległością między środkami obiektów w chwili początkowej. Ponieważ przewidywania te są bliższe prawdy dla większych odległości między pineškami (gdzie nachylenie cieczy zmienia się powoli), dla każdej serii pomiarowej dopasowaliśmy powyższą funkcję dla pierwszej połowy pomiarów (co odpowiada większym odległościom między pineškami), patrz wykres 1.



Wykres 1

Jak się okazuje, dopasowanie to nie opisuje dobrze ruchu pinesek w mniejszych odległościach. Rozbieżności są na tyle duże, że nie mogą wynikać z przyjętych założeń dotyczących bezwładności lub lepkiego charakteru sił oporu. Oznacza to, że najprawdopodobniej źródłem różnic jest efekt związany z faktem, że średnica pineśki jest porównywalna z λ .

Z pomiarów wynika także, że siła oddziaływania spada wraz z napięciem powierzchniowym.

Odpychanie

Możliwe jest uzyskanie odpychającej siły między obiektami. Występuje ona np. między pineską, a krawędzią naczynia. W ogólności siła odpychająca występuje zawsze, gdy pineśka jest przechylona ostrzem w stronę przeciwną niż obiekt odkształcający powierzchnię, co ma miejsce, gdy obiekt ten odkształca powierzchnię tak, że pojawia się spadek jej wysokości wraz z rosnącą odległością od obiektu.

Dalsze badania

W celu lepszego zrozumienia zjawiska należy zbadać oddziaływania pinesek różnych rozmiarów. Pozwoli to zweryfikować hipotezę o wpływie rozmiarów oddziałujących obiektów na siłę oddziaływań. Ponieważ analityczny model teoretyczny możliwy jest jedynie w

bardzo prostych przypadkach, można przeprowadzić doświadczenie wykorzystujące długie paski. Pozwoliłoby to na bezpośrednie zweryfikowanie rozważań teoretycznych poczynionych w tej pracy. Można także spróbować numerycznie przewidzieć oddziaływania dwóch pinesek i porównać je z wynikami dla paska o porównywalnych wymiarach (przy zaniedbaniu wpływu ugięcia powierzchni cieczy na jego brzegach).

Odnosiniki

- [1] Dominic Vella and L. Mahadevan, *The „Cheerios” effect*, 2005
- [2] Pierre-Gilles de Gennes, Francoise Brochard-Wyart, David Quere, *Capillarity and Wetting Phenomena*, 2004